Exercice commenté pas à pas

Résolution d'équations

On considère un nombre m et l'équation d'inconnue x :
$(m - 3)x^2 + (2m - 1)x + m + 2 = 0$.

1. Écrire l'équation lorsque $m = 4$, puis résolvez-la.
2. Résoudre l'équation lorsque $m = 3$.
3. a. Peut-on trouver une valeur de m pour que 0 soit solution de l'équation ?
b. Peut-on trouver une valeur de m pour que –1 soit solution de l'équation ?
4. On suppose que $m \neq 3$.
a. Écrire l'expression des racines en fonction de m.
b. Utiliser la question **3. b.** pour écrire l'expression des racines.

Lorsque $m = 4$, on obtient une équation du second degré à l'inconnue x.

1. Si $m = 4$ alors $m - 3 = 1$, $2m - 1 = 7$, et $m + 2 = 6$. L'équation équivaut à $1x^2 + 7x + 6 = 0$, c'est-à-dire $x^2 + 7x + 6 = 0$.
On trouve $\Delta = 7^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25$. L'équation a donc deux solutions qui sont $\dfrac{-7 - \sqrt{25}}{2}$ et $\dfrac{-7 + \sqrt{25}}{2}$, c'est-à-dire –6 et –1.

Lorsque $m = 3$, on obtient une équation du premier degré.

2. Si $m = 3$, l'équation équivaut à $0x^2 + 5x + 5 = 0$ donc $5x + 5 = 0$ $\Leftrightarrow x = -1$. L'équation a pour solution –1.

Si 0 est solution, lorsqu'on remplace x par 0 dans le polynôme, on doit obtenir 0 comme résultat.

3. a. Le nombre 0 est solution de l'équation si, et seulement si, $(m - 3) \times 0^2 + (2m - 1) \times 0 + m + 2 = 0 \Leftrightarrow m + 2 = 0$. Donc, 0 est solution de l'équation si, et seulement si, $m = -2$.

On raisonne comme dans la question a. sachant que –1 (et non plus 0) est une solution.

3. b. De même, le nombre –1 est solution de l'équation si, et seulement si :

$$(m - 3) \times (-1)^2 + (2m - 1) \times (-1) + m + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow m - 3 - 2m + 1 + m + 2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Cette dernière égalité est vraie pour toute valeur de m. On déduit que –1 est solution de l'équation pour toute valeur de m.

Calculer Δ puis utiliser les formules des racines.

4. a. Dans cette équation, $a = m - 3$, $b = 2m - 1$, $c = m + 2$. Donc :

$$\Delta = (2m-1)^2 - 4(m-3)(m+2) = 4m^2 - 4m + 1 - 4(m^2 + 2m - 3m - 6)$$
$$= 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 + 4m + 24 \Leftrightarrow \Delta = 25.$$

L'équation a donc deux solutions qui sont :

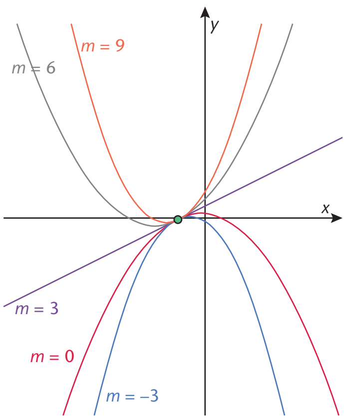
$$\frac{-2m+1-5}{2(m-3)} = \frac{2(-m-2)}{2(m-3)} = \frac{-m-2}{m-3} = -\frac{m+2}{m-3} \text{ et}$$
$$\frac{-2m+1+5}{2(m-3)} = \frac{-2(m-3)}{2(m-3)} = -1.$$

Sachant que –1 est une racine, utiliser l'expression du produit des racines.

b. Si on nomme x' la racine autre que –1, on a :

$x' \times (-1) = \frac{c}{a} = \frac{m+2}{m-3} \Leftrightarrow x' = -\frac{m+2}{m-3}$. On retrouve bien sûr les expressions précédentes.

• **Remarque :** ci-dessous, on peut observer les représentations graphiques des fonction $x \mapsto (m-3)x^2 + (2m-1)x + m + 2$ pour des valeurs de m. On voit que toutes les courbes passent par le point de coordonnées (–1, 0).



Fonctions exponentielles

QUIZ-Mémorisation active

1 Propriétés algébriques

Questions	Réponses
Comment traduire, à l'aide d'une égalité, que l'exponentielle d'une somme est égale au produit des exponentielles ?	Soit a et b deux nombres. Alors e^{a+b} (exponentielle d'une somme) est égale à $e^a e^b$ (produit des exponentielles).
Comment traduire par une phrase que $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$?	L'exponentielle de l'opposé (e^{-b}) est égale à l'inverse de l'exponentielle $\left(\dfrac{1}{e^b}\right)$.
Soit m un nombre. L'équation d'inconnue x, $e^x = m$ a-t-elle toujours des solutions ?	**Non.** Elle a des solutions si, et seulement si, $m > 0$ car une exponentielle est toujours positive, quel que soit son exposant.

2 Propriétés analytiques

Questions	Réponses
Existe-t-il des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, dérivables et dont la dérivée soit égale à elles-mêmes ?	**Oui.** Ce sont les fonctions de la forme $x \mapsto ke^x$. De plus, si on impose $f(0) = 1$, alors la seule fonction possible est la fonction exponentielle elle-même.
Soit k une constante. Si $f(x) = e^{kx}$, que vaut $f'(x)$?	$f(x) = \exp(kx)$. Selon la formule de dérivation de la composée (*fiche 21*), $f'(x) = k \times \exp'(kx) \Rightarrow f'(x) = ke^{kx}$.
Soit k une constante. Quelle est la monotonie des fonctions $x \mapsto e^{kx}$ sur $\mathbb{R}$?	Les fonctions $x \mapsto e^{kx}$ sont croissantes si, et seulement si, $k \geqslant 0$ et décroissantes si, et seulement si, $k \leqslant 0$.
Comment construire rapidement la courbe de e^{-x} à partir de celle de e^x ?	La courbe de e^{-x} est symétrique de celle de e^x par rapport à l'axe des ordonnées.

SCHÉMA-BILAN

Pour résoudre des (in)équations avec exponentielles

Retenir

- $e^a e^b = e^{a+b}$
- $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
- $\dfrac{1}{e^b} = e^{-b}$
- $(e^x)^2 = e^{2x}$

Attention

- $e^a + e^b \neq e^{a+b}$
- $e^a - e^b \neq e^{a-b}$
- $e^{-b} \neq -e^b$
- $e^{x^2} \neq (e^x)^2$

Pour étudier des fonctions avec exponentielles

Retenir

- $e \approx 2{,}718$
- La dérivée de e^x est e^x.
- une primitive de e^x est e^x.
- une primitive de e^{ax+b} est $\dfrac{1}{a}e^{ax+b}$.

Attention

- Le nombre e n'est pas la fonction e^x.
- La dérivée de e^u n'est pas e^u mais $u'\,e^u$.
- On ne connaît pas en général de primitives de e^u.
- Une primitive de e^{ax+b} n'est pas e^{ax+b}.

En général, pour résoudre une équation où figure une exponentielle, on utilise la calculatrice ou un algorithme.