Spécial Bac
Mathématiques

Corrigés des schémas « Je mémorise »

MAGNARD

Je mémorise

Si je veux dénombrer	J'utilise
La réunion de deux ensembles **disjoints**	**card** $(A \cup B)$ **= card** (A) **+ card** (B)
La réunion de deux ensembles	**card** $(A \cup B)$ **= card** (A) **+ card** (B) **− card** $(A \cap B)$
Un produit cartésien	**card** $(A \times B)$ **= card** (A) $\times$ **card** (B)

Comment faire s'il n'y a pas de formule à appliquer ?	Je dois organiser les données
Combien y a-t-il de dominos dans un jeu complet ?	**28 dominos : 7 + 6 + … + 1**
Combien y a-t-il de façons de totaliser 18 € avec des pièces ou billets de 1, 2, 5 et 10 € ?	**Il y en a 27 (voir le tableau ci-dessous)**

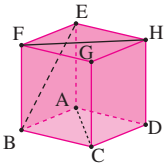
Un	Deux	Cinq	Dix	
18	0	0	0	18
16	1			18
14	2			18
13		1		18
12	3			18
11	1	1		18
10	4			18
9	2	1		18
8	5			18
8		2		18
8			1	18
7	3	1		18
6	6			18
6	1	2		18
6	1		1	18
4	2	2		18
4	2		1	18
3		3		18
3		1	1	18
2	8			18
2	3	2		18
2	3		1	18
1	1	3		18
1	1	1	1	18
0	9			18
0	4	2		18
0	4		1	18

Si je veux compter	J'utilise
Des n-uplets d'éléments tous distincts choisis dans un même ensemble	**La formule des arrangements**
Des n-uplets dont les éléments sont distincts ou non choisis dans un même ensemble	**La formule p^n où p est le cardinal de l'ensemble**
Des ensembles (donc l'ordre ne compte pas)	**La formule des combinaisons**
Le nombre total de parties d'un ensemble de cardinal n	**Ce nombre est égal à 2^n**

Si	Alors
$4! = 24$	$5! = \mathbf{5 \times 24}$
$A_6^6 = 720$	$A_6^5 = \mathbf{A_6^6 = 720}$
J'ai cette ligne du triangle de Pascal 1 | 4 | 6 | 4 | 1	La ligne suivante est **1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1**
$\binom{10}{4} = 210$ et $\binom{10}{1} = 10$	$\binom{10}{6} = \mathbf{210}$ et $\binom{10}{9} = \mathbf{10}$

Je mémorise

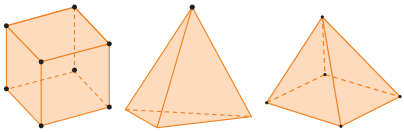
On se place dans l'espace et on dispose d'un repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Si je sais que	Alors
Les points A, B, C sont alignés	Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéiares** Les coordonnées de ces vecteurs sont **proportionnelles**
Les points A, B, C ne sont pas alignés et M a pour coordonnées $(x\,, y)$	Je peux écrire $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$
Les droites (AB) et (DC) sont parallèles	Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont **colinéaires**
$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$	Je calcule ses coordonnées ainsi : $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$
I est le milieu de [AB]	Je calcule ses coordonnées ainsi : $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$
$\vec{u} = k\overrightarrow{AB}$	Je calcule ses coordonnées ainsi : $(k\,(x_B - x_A), k\,(y_B - y_A), k\,(z_B - z_A))$
$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$	Je calcule ses coordonnées ainsi : $(x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}}, y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}}, z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}})$
Deux plans sont orthogonaux à un même troisième	Ils sont **parallèles**
Je dois commenter la figure représentant un cube 	• Je dis que les droites (AC) et (FH) sont **non coplanaires** • La droite (FH) est **parallèle** au plan (ABC) • La droite (BE) n'est pas **orthogonale** au plan (ABC)

Si je sais que	Je ne peux pas affirmer
Deux droites sont perpendiculaires à une même droite	Qu'elles sont **parallèles**
Une droite est orthogonale à une droite d'un plan	Qu'elle est **orthogonale à ce plan**
Une droite est parallèle à un plan	Qu'elle est parallèle à toute **droite de ce plan**
Deux plans sont parallèles	Toute droite de l'un est **parallèle à toute droite de l'autre**

En l'absence de repère orthonormé

Pour calculer un produit scalaire dans un solide dont je connais les dimensions



→
- J'utilise la relation de **Chasles**
- La formule avec l'orthogonalité caractérisée par **la projection oprthogonale**
- Je peux choisir un repère **orthonormé**

Pour calculer des dimensions → Dans un triangle rectangle, j'utilise le théorème de **Pythagore**

Pour calculer un angle → J'utilise la formule **avec le cosinus**

Avec un repère orthonormé

Pour calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u'}$ → J'utilise la formule $xx' + yy' + zz'$

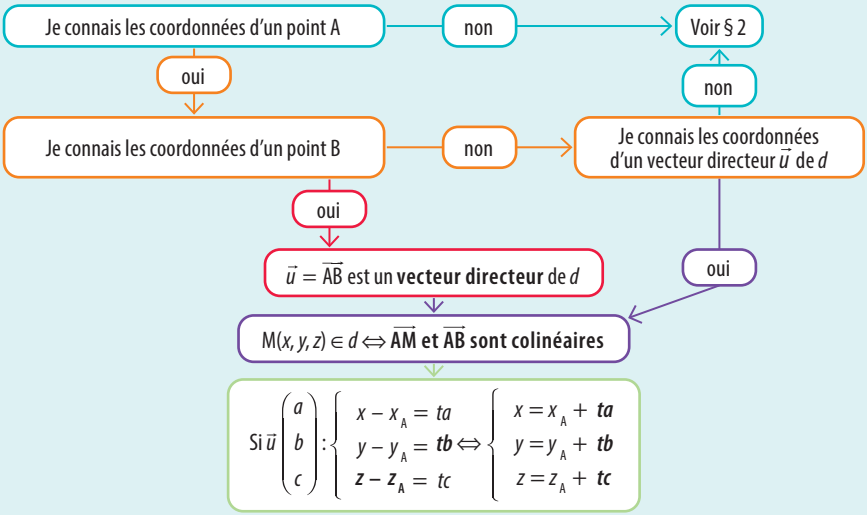
Pour calculer la norme $\|\vec{u}\|$ → J'utilise la formule $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Pour calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$ → J'utilise la formule
$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Pour savoir si les droites (AB) et (CD) sont orthogonales → Je calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$
et je conclus ainsi : $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

Pour savoir si le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) → Je calcule les produits scalaires $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}$ et je conclus ainsi :
$\vec{n}$ est normal au plan (ABC) si et seulement si les deux produits scalaires sont nuls

Déterminer des équations paramétriques de droites



Équations de droites et plans

SI	Alors
Un plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $2x - z + 1 = 0$	Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ a pour coordonnées **(2, 0, –1)**
$\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$	Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est de la forme $\boldsymbol{-x + 3y - 2z + d = 0}$
A, B, C sont trois points non alignés	Le plan (*ABC*) pour vecteur normal **Un vecteur orthogonal à la fois à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$**
Des équations paramétriques d'une droite d sont $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$	• Elle passe par le point **A(1, 2, 0)** • Un vecteur directeur est $\vec{u}$**(–1, 1, 1)**
Une droite d est orthogonale au plan d'équation $2x + y - z = 0$	Un de ses vecteurs directeurs est $\vec{u}$**(2, 1, – 1)**
Un point H est le projeté orthogonal d'un point A sur un plan $\mathcal{P}$	• Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\overrightarrow{AH}$ • La distance de A à $\mathcal{P}$ est **AH**
Une droite (AB) perce orthogonalement un plan $\mathcal{P}$ en H	H est **le projeté orthogonal de A et B sur** $\mathcal{P}$
Une droite d est orthogonale à deux vecteurs non colinéaires d'un plan $\mathcal{P}$	d est **orthogonale à** $\mathcal{P}$

Calculer la limite d'une suite u_n ($n \to +\infty$)

$u_n = f(n)$

Appliquer les théorèmes sur **les limites de fonctions**

$u_{n+1} = f(u_n)$

Pour savoir si la suite converge, utiliser les théorèmes **d'encadrement** ou de convergence monotone

Si la suite converge vers ℓ alors $f(\ell) = \ell$

$u_n = q^n$ ($q \neq 1$)

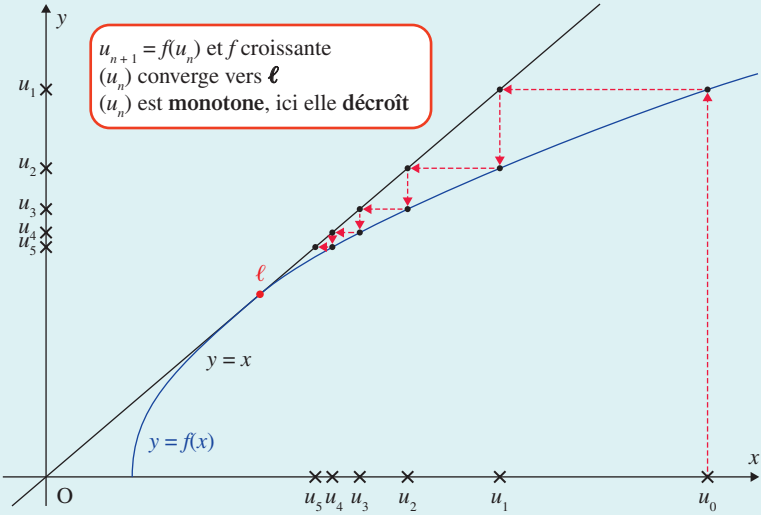
Si $|q| < 1$, alors (u_n) tend vers **0**

Si $|q| > 1$, alors (u_n) **diverge**

Si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Si $q \leq -1$, (u_n) n'a pas de limite

Représentation graphique d'une suite récurrente



Je mémorise

Je mémorise les limites usuelles	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^5} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$
Si $n \in \mathbb{N}^*$, je sais distinguer les limites selon la parité de n	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ si n est **pair** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ si n est **impair**
Pour calculer la limite d'un polynôme quand x tend vers 2	Je remplace **x par 2**
Pour calculer la limite en $+\infty$ d'un polynôme	Je dois le factoriser par **son terme de plus haut degré**
Une forme indéterminée liée à la somme est	$+\infty - (+\infty)$
La forme indéterminée liée au produit est	$0 \times (\pm\infty)$
Les deux formes indéterminées liées au quotient sont	$\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$
Il est possible que la limite d'une fonction soit infinie quand x tend vers -2	Pour cela -2 doit **ne pas appartenir à l'ensemble de définition**
Pour savoir si la courbe C_f d'une fonction f a une asymptote horizontale	Je calcule **les limites éventuelles de f en $-\infty$ et en $+\infty$**
Pour savoir si la courbe C_f d'une fonction f a une asymptote verticale d'équation $x = -3$	Je calcule **les limites éventuelles de f en $(-3)^-$ et en $(-3)^+$**

On considère des fonctions f, u, v,… dérivables. On s'intéresse aux formules et non à leur validité dans des cas extrêmes.

La dérivée de	Est
e^{x^2+1}	$\mathbf{2xe^{x^2+1}}$
$\sqrt{u}$	$\mathbf{\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}}$
u^n	$\mathbf{nu'\,u^{n-1}}$

Si	Alors
$f''(a) = 0$ et f'' change de signe en a	**la courbe de f a un point d'inflexion d'abscisse a**
La fonction dérivée f' est croissante sur un intervalle	f est **convexe sur cet intervalle**
f est concave sur un intervalle	f' est **décroissante sur cet intervalle**
$f''(x)$ est positive sur un intervalle	f est **convexe sur cet intervalle**

L'algorithme de dichotomie	
Pour une fonction f sur un intervalle $[a, b]$	Met en jeu le **milieu** de $[a, b]$
Met en jeu	Une boucle **while**
Comprend une boucle dont la condition concerne	**la distance ab notée abs $(b - a)$ (pour valeur absolue de $(b - a)$)**

Pour résoudre des équations et inéquations avec logarithmes et exponentielles

On suppose que a et b sont deux réels strictement positifs.

Propriétés algébriques

Utilisez ☺

- $\ln(ab) = \mathbf{\ln(a) + \ln(b)}$
- $\mathbf{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \mathbf{-\ln(b)}$
- $\mathbf{\ln(a^2)} = 2\ln(a)$
- $\ln(1) = \mathbf{0}$
- $\ln(e^x) = \boldsymbol{x}$
- $e^{\ln x} = x$

Attention ☹

- $\ln(a + b) \neq \ln a + \ln b$
- $\frac{\ln a}{\ln b} \neq \ln(a) - \ln(b)$
- $\frac{1}{\ln b} \neq -\ln(b)$
- $(\ln(a))^2 \neq 2\ln(a)$
- $\ln(0)$ **n'existe pas**
- Égalité vraie pour **tout réel** $\boldsymbol{x}$
- Égalité vraie si, et seulement si, $\boldsymbol{x > 0}$

Inéquations

Utilisez ☺

- $\ln x \geq m \Leftrightarrow \boldsymbol{x \geq e^m}$
- $\boldsymbol{e^x \geq m} \Leftrightarrow x \geq \ln(m)$

Attention ☹

- Valable **quelle que soit la valeur de** $\boldsymbol{m}$
- Valable si et seulement si $\boldsymbol{m > 0}$

Outils pour l'étude de fonctions avec logarithme

Utilisez ☺

- $\ln(x)$ peut être négatif : **si $x \in$]0 ; 1]**
- La dérivée de $\ln x$ est $\frac{1}{x}$
- $\ln'(2) = \frac{1}{2}$ car $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$
- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$
- Le nombre dérivé pour lever des formes indéterminées du type $\frac{0}{0}$
- Le signe de la **dérivée seconde** pour examiner la concavité de la fonction ln

Attention ☹

- Il est faux de dire que $\ln x$ est toujours **positif**
- La dérivée de $\ln(u)$ n'est pas $\frac{1}{u}$ mais $\frac{u'}{u}$
- $(\ln 2)' = 0$ car il s'agit ici de dériver la constante ln2
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln x$ **n'existe pas**
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x}$ n'est pas une forme indéterminée. Elle vaut $-\infty$ par division
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x$ n'est pas une forme indéterminée. Elle vaut $+\infty$ par multiplication
- S'il ne s'agit pas de croissances comparées, pensez au **nombre dérivé**
- C'est la monotonie de la **dérivée** qui permet de savoir si la fonction est concave ou convexe

Je mémorise

Si	Alors
Une fonction est périodique de période 2π	Je peux l'étudier sur un intervalle de longueur $\mathbf{2\pi}$
Une fonction est paire et périodique de période 2π	Je peux l'étudier sur l'intervalle $[\mathbf{0, \pi}]$
$f(x) = \sin(ax + b)$	$f'(x) = \boldsymbol{a \cos(ax + b)}$
$f(x) = \cos(ax + b)$	$f'(x) = \boldsymbol{-a \sin(ax + b)}$
$\cos x = \cos a$	$x = \boldsymbol{a + 2k\pi}$ **ou** $x = \boldsymbol{-a + 2k\pi}$
$\sin x = \sin a$	$x = \boldsymbol{a + 2k\pi}$ **ou** $x = \boldsymbol{\pi - a + 2k\pi}$
$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	Selon les valeurs de k, x a **deux** images sur le cercle trigonométrique
$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$	Selon les valeurs de k, x a **trois** images sur le cercle trigonométrique

Résoudre une équation différentielle $y' = ay + g$

a est une constante non nulle et g une fonction simple.

Chercher une solution particulière
(méthode donnée dans l'énoncé) notée f_0

↓

Suivre la méthode indiquée par l'énoncé

↓

Les solutions sont de la forme $x \longmapsto f_0(x) + ke^{ax}$
où k est une constante

Trouver les primitives d'une fonction continue

Utiliser le tableau du paragraphe I.2

↓ ou

Lire de droite à gauche le tableau des **dérivées**

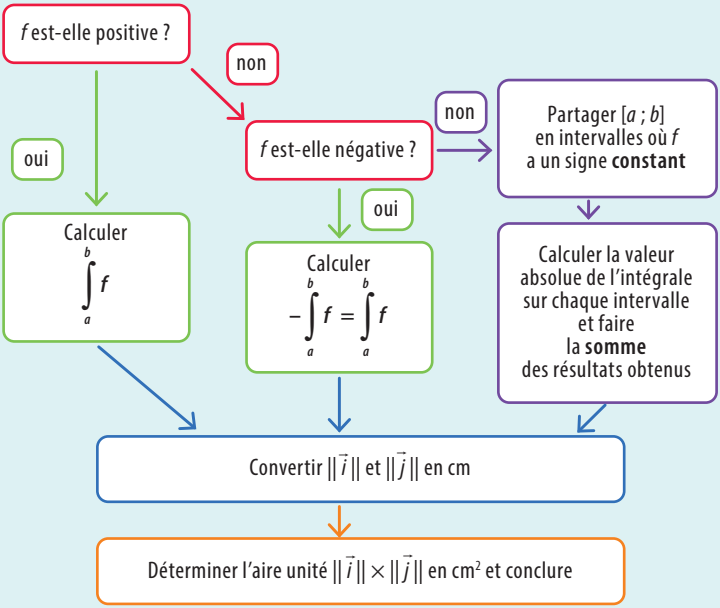
↓ ou

L'énoncé demande de prouver que F est une primitive de f :
prouver que l'on a $F'(x) = f(x)$

Je mémorise

L'intégrale d'une somme est égale à	La **somme** des intégrales
$\int_a^b 3f =$	$3\int_a^b f$
Pour calculer l'intégrale d'un produit	J'utilise la formule **d'intégration par parties**
Pour calculer l'aire entre une courbe, l'axe des abscisses et deux verticales	Je dois examiner le **signe** de la fonction et **la position des bornes de l'intégrale**
Une méthode de calcul d'intégrale mettant en jeu le hasard est	La méthode de **Monte-Carlo**
La valeur moyenne d'une fonction *f* entre *a* et *b* est	$\frac{1}{b-a}\int_a^b f$

Calculer une aire entre *a* et *b* ($a \leq b$)



Construction d'un arbre de probabilités relatif à trois événements formant un système complet de l'univers

1. Je complète l'arbre de probabilités

$a = P(A)$, $b = P(B)$, $c = P(C)$

$a + b + c = 1$

$a_1 = P_A(X)$, $a_2 = P_A(\overline{X})$

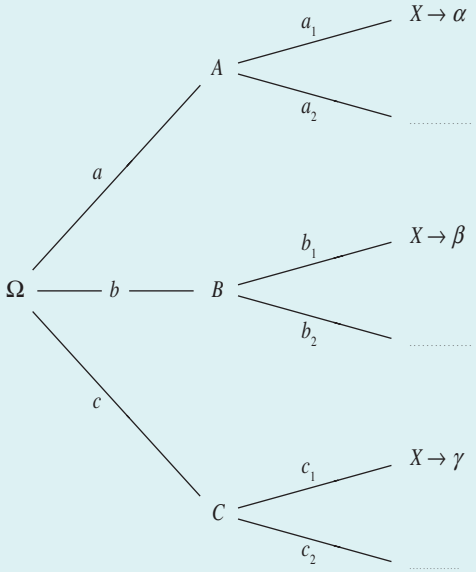
$b_1 = P_B(X)$, $b_2 = P_B(\overline{X})$

$c_1 = P_C(X)$, $c_2 = P_C(\overline{X})$

$\alpha = P(X \cap A) = P_A(X)\,P(A)$

$\beta = P(X \cap B) = P_B(X)\,P(B)$

$\gamma = P(X \cap C) = P_C(X)\,P(C)$



$P(X) = \alpha + \beta + \gamma$

2. Je complète le tableau de la loi de probabilité d'une variable aléatoire

x	x_1	.....	x_n
$f(x)$	$p_1 = P(X = x_1)$	.....	$p_n = P(X = x_n)$

3. Je vérifie que $p_1 + \ldots + p_n = 1$

Reconnaître et utiliser une loi binomiale

Il est évident qu'il y a répétition à l'identique d'une même expérience ou **L'énoncé dit qu'on peut assimiler la question à une répétition à l'identique d'une même expérience**

↓

J'effectue n **répétitions**

↓

Les répétitions sont **deux à deux indépendantes**

↓

L'expérience a deux issues (**succès**, **échec**)

↓

Le succès S a pour probabilité p (donc $P(S) = \mathbf{1} - \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$)

↓

Je définis une variable aléatoire X comptant le nombre de succès au cours des n répétitions

↓

La loi de X est alors la loi **binomiale** de paramètres n et p

↓

$X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$

↓

$$\forall\, k \in X(\Omega),\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

↓

$E(X) = \boldsymbol{np}$ et $V(X) = \boldsymbol{npq}$

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Je relie z, $\bar{z}$ et $\mathrm{Re}(z)$ par l'égalité	$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$
Je relie z, $\bar{z}$ et $\mathrm{Im}(z)$ par l'égalité	$\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$
Lorsque j'écris $z = x + iy$,	c'est une forme algébrique à condition que **x et y soient réels**
Lorsque j'écris $z = re^{i\alpha}$,	c'est une forme exponentielle à condition que $r > 0$
Un argument d'un produit de nombres complexes z et z'	est **la somme** des arguments de z et z'
Un argument de $\dfrac{1}{z}$ où $z \neq 0$	est **l'opposé de $\arg(z)$**
Le conjugué d'une somme	est **la somme** des conjugués
Le conjugué d'un produit,	est **le produit** des conjugués
$z\bar{z} =$	$\lvert z\rvert^2$
Géométriquement, le module $\lvert z_A - z_B\rvert$	mesure **la distance AB**
Géométriquement, l'argument de $z_A - z_B$	mesure l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB})$
Pour démontrer qu'un triangle ABC est rectangle ou isocèle en A	Je peux utiliser le quotient $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$
J'énonce la formule de Moivre	$(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$
J'énonce les formules d'Euler	$\cos\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$ $\quad \sin\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$
Les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$ lorsque a, b, c sont réels, $a \neq 0$ et $\Delta < 0$ sont	**Non réelles et conjuguées :** $\dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Je mémorise

Pour la suite, on considère des entiers.

Si	Alors
a est un diviseur de b	b est un **multiple** de a
Des diviseurs sont communs à deux entiers	Ce sont des diviseurs de leur **PGCD**
$\delta = a \wedge b$	$\frac{a}{\delta}$ et $\frac{b}{\delta}$ sont **premiers entre eux**
$a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$	**Alors** $a \pm c \equiv b \pm d\ [n]$ et $ac \equiv bd\ [n]$
$a = bq + r\ (b > 0)$	$a \equiv r\ [b]$

$109 = 11 \times 9 + 10$ → Représente la division euclidienne de **109** par **11**

Si $a|c$ et $b|c$ → Alors $ab|c$ à condition que **a et b soient premiers entre eux**

L'équation dans $\mathbb{Z}$ $ax + by = 1$ a des solutions → Si, et seulement si, **a et b sont premiers entre eux**

L'équation dans $\mathbb{Z}$ $ax + by = c$ a des solutions → Si, et seulement si, **c est un multiple du PGCD de a et b**

Deux nombres premiers distincts → Sont **premiers entre eux**

Connaissant la décomposition de deux entiers en facteurs premiers → Je trouve leur PGCD ainsi : **c'est le produit des nombres premiers communs aux deux décompositions élevés chacun à leur plus petite puissance**

Trouver les entiers x et y, solutions de l'équation $ax + by = 1$

$a, b \in \mathbb{Z}$ sont donnés et premiers entre eux.

Je cherche des solutions particulières x_0 et y_0

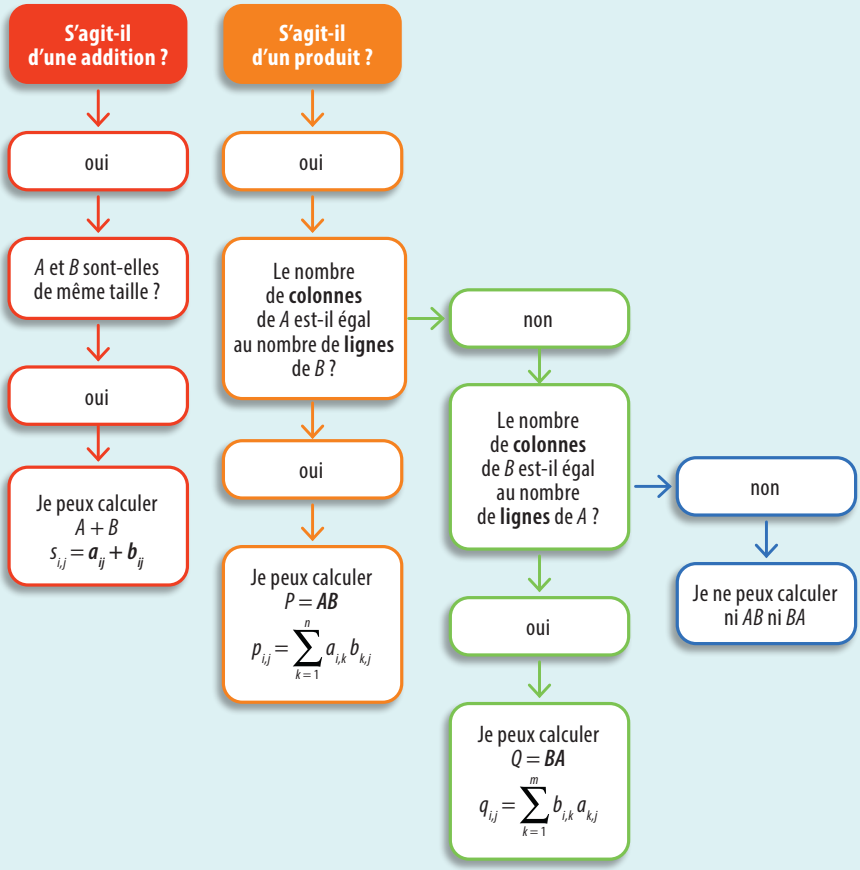
↓

Je résous $\begin{cases} ax + by = 1 \\ ax_0 + by_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow a(x - x_0) = \mathbf{b(y_0 - y)}$ (1)

↓

J'applique le théorème de Gauss : $a|b\,(y_0 - y) \Rightarrow \mathbf{a|(y - y_0)}$

↓

Donc $y - y_0 = ka \Rightarrow y = \mathbf{y_0 + ka}$, puis je remplace dans (1) et je trouve $\mathbf{x = x_0 - bk}$

Calculs avec les matrices $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$